සංකීර්ණ සංඛ්‍යා

Note:- **තාත්වික සංඛ්‍යා [IR]**

+∞ හා -∞ අතර සියලු
ධන, ඍණ පූර්ණ සංඛ්‍යා, භාග සංඛ්‍යා
දශම සංඛ්‍යා ~ . සියලුම වේ

අතාත්වික සංඛ්‍යා [i]

වර්ගමූලයක ඍණ ඇති සංඛ්‍යා.

උදා: $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-\frac{1}{5}}$

$i = \sqrt{-1}$
$(i)^2 = (-1)$

i හා ආශ්‍රිත සුළු කිරීම්

① i^4
$(i^2)^2 = (-1)^2$
$= 1$ //

② i^5
$(i)^4 . i$
$1 . i = i$ //

③ i^{2005}
$(i^{2004}) . i$
$(i^2)^{1002} . i$
$(-1)^{1002} . i$
$1 i$
i //

④ $\sqrt{-9}$
$\sqrt{-1.9}$
$\sqrt{-1} . \sqrt{9}$
$3i$ //

සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ($\mathbb{C}$)

$x + iy$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි සංඛ්‍යා

තාත්වික කොටස · Re z

අතාත්වික කොටස Im z

මෙහි x, y = තාත්වික සංඛ්‍යා විය යුතුය

හුදෙක් (ශුද්ධ) අතාත්වික නම්,

තාත්වික කොටස 0
iy ආකාරය

හුදෙක් (ශුද්ධ) තාත්වික නම්

අතාත්වික කොටස 0
x ආකාරයේ.

සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආශ්‍රිත සුළු කිරීම්

01 එකතු කිරීම / අඩු කිරීම

තාත්වික කොටස වෙනම
අතාත්වික කොටස වෙනම එකතු කරන්න / අඩු කරන්න

උදා: ① $z_1 = 10 + 9i$,
$z_2 = 8 + 3i$,
$(z_1 + z_2) = 18 + 12i$

උදා: ② $z_1 = 10 + 9i$,
$z_2 = 8 + 3i$,
$z_1 - z_2 = 2 + 6i$ //

02 ගුණ කිරීම

සාමාන්‍ය ලෙස ගුණ කරන්න.

$(1+i)^2 = 2i$
$(1-i)^2 = -2i$

① $(10 + 6i)(5 - 2i)$
$50 - 20i + 30i - 12i^2$
$50 + 10i + 12.(-1)$
$62 + 10i$ //

② $(4 + 7i)^2$
$16 + 56i + 49i^2$
$16 - 49 + 56i$
$56i - 33$ //

③ $(1+i)^7$
$(1+i)((1+i)^2)^3$
$(1+i)(8i^2.i)$
$(1+i).-8i$
$-8i - 8i^2$
$-8i + 8$
$8 - 8i$ //

03 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක ප්‍රතිබද්ධය

$z = x + iy$ නම්
z ගේ ප්‍රතිබද්ධය, $\overline{z}$ වන
$\overline{z} = x - iy$

$\overline{z} = x$, $\overline{z} = x$

සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවල ගුණිතය

$z.\overline{z} = (x+iy)(x-iy)$
$= x^2 \cancel{-} i^2 y^e$
$z.\overline{z} = x^2 + y^2$

① $z.\overline{z} = \left[\text{තාත්වික කොටසේ}\right]^2 + \left(\text{අතාත්වික කොටසේ}\right)^2$

$z + \overline{z} = x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy}$
$= 2x$

② $z + \overline{z} = 2\left[\text{තාත්වික කොටස}\right]$
$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$

$z - \overline{z} = \cancel{x} + iy - \cancel{x} + iy$
$z - \overline{z} = 2iy$

$z - \overline{z} = 2i\left(\text{අතාත්වික කොටස}\right)$
$z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$

04 z සංඛ්‍යා x+iy ආකාරයට හැරවීම.

- හරයේ i වූ විට ගුණ කළ යුතුය
- හරයට එම හරයේ ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කරමි.

① $\dfrac{(5+3i)}{(1-2i)} \times \dfrac{(1+2i)}{(1+2i)} = \dfrac{5 + 13i + 6i^2}{1+4}$

$= \dfrac{\cancel{5}\,\text{-}1}{5} + \dfrac{13i}{5}$

$= x + iy$ ආකාරයෙ

$x = \left(-\dfrac{1}{5}\right)$ $y = \dfrac{13}{5}$

② $\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$ බව පෙන්වන්න

LHS $\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} \times \dfrac{\cos\beta - i\sin\beta}{\cos\beta - i\sin\beta}$

~~$\cos\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta$~~
~~$\cos^2\beta + \sin^2\beta$~~
~~$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$~~

$= \dfrac{\cos\alpha\cos\beta - i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta - i^2\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta}$

$= (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + i(-\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)$

$= \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$
$= \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$
$=$ RHS.

③ $\dfrac{4}{i} + \dfrac{34(2-i)}{(1+4i)}$

$\dfrac{4}{i} \times \dfrac{i}{i} + \dfrac{34(2-i)\times(1-4i)}{1+16}$

$-4i + 2\left[2 - 8i - i + 4i^2\right]$

$-4i + 2\left[-2 - 9i\right]$

$-4 - 22i$

වැදගත්

$z.\overline{z} = \left(\text{තාත්වික කොටස}\right)^2 + \left(\text{අතාත්වික කොටස}\right)^2$

$z + \overline{z} = 2(\mathrm{Re}\,z)$

$z - \overline{z} = 2i(\mathrm{Im}\,z)$

$|z|^2 = z.\overline{z}$

$\overline{\overline{z}} = z$

$\boxed{05}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක සමානතාවය

- සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් සමානනම්
- තාත්වික හා අතාත්වික කොටස් වෙන වෙනම සමානවේ.

① $\frac{(1+i)x-2i}{(3+i)} + \frac{(2-3i)y+1}{(3-i)} = i$

ප්‍රතිබද්ධයෙන් දෙපස වැඩිකර සාමාන්‍ය ලෙස සුළු කරන්න

$(4x+9y+1) + i(2x-7y-5) = 0+i0$

තාත්වික ⇒ $4x+9y+1 = 0$

$4x+9y = -1$ — ①

අතාත්වික ⇒ $2x-7y-5 = 0$

$2x-75-15 = 0$ — ②

① හා ② සමගාමී සමීකරණ ලෙස විසඳීමෙන් x හා y සොයන්න.

② $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$ වනපරිදි nට ගතහැකි අවම ධන නිඛිලමය අගය සොයන්න.

පිළි

$\left(\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}\right)^n$

$\left(\frac{(1+i)^2}{1+1}\right)^n$

$\left(\frac{2i}{2}\right)^n = i^n$

$i^n = 1$

$i^2 = (-1)$

n අවම අගය = 4

$\boxed{06}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක වර්ගමූලය සෙවීම

- වර්ගමූල සංඛ්‍යාව = $x+iy$ ලෙස ගන්න
- දෙපැත්තම දෙපසවර්ග කරන්න.
- x හා y සොයන්න දෙපස තාත්වික හා අතාත්වික කොටස් දෙක වෙන වෙනම සමාන කිරීමෙන්

① $\sqrt{3+4i}$ සොයන්න

$\sqrt{3+4i} = x+iy$ ලෙස ගනිමු.

දෙපසවර්ගකරමු

$3+4i = x^2+2xyi+i^2y^2$

$3+4i = x^2-y^2+2xyi$

තාත්වික

$3 = x^2-y^2$

$3 = x^2 - \frac{4}{x^2}$

$3x^2 = x^4-4$

$x^4-3x^2-4 = 0$

$(x^2-4)(x^2+1) = 0$

අතාත්වික

$4 = 2xy$

$y = \frac{2}{x}$

$x = \pm 2$

$x = \sqrt{-1}$ $\times$

x තාත්වික සංඛ්‍යාවකි

$x = +2$ හෝ $x = -2$

$y = 1$ $y = -1$

$\sqrt{3+4i} = 2+i$ //

හෝ

$\sqrt{3+4i} = -2-i$ //

② $z = x+iy$,

$z^{1/3} = a - ib$ නම්,

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = k(a^2-b^2)$ නම්

k නියතයේ අගය සොයන්න

$\sqrt[3]{x+iy} = a - ib$

3න් ඝනකිරීම දෙපස

$(x+iy) = a^3 - 3a^2ib$
$+3ai^2b^2 + i^3b^3$

$(x+iy) = a^3 - 3a^2bi ~~+~~ - 3ab^2$
$~~+~~ + b^3i$

$(x+iy) = (a^3 - 3ab^2) + (-3a^2b+b^3)i$

තාත්වික

$x = a^3 - 3ab^2$

$\frac{x}{a} = a^2 - 3b^2$ L①

අතාත්වික

$y = -3a^2b + b^3$

$\frac{y}{b} = -3a^2 + b^2$ L②

① − ②

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 4a^2 - 4b^2$

$k\cancel{(a^2-b^2)} = 4\cancel{(a^2-b^2)}$

$k = 4$

$\boxed{07}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක වැදගත් ලක්ෂණ

$\overline{z_1 \pm z_2}$	$= \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
$\overline{z_1 \underset{\div}{\times} z_2}$	$= \overline{z_1} \underset{\div}{\times} \overline{z_2}$
$\overline{z^n}$	$= (\overline{z})^n$

සාධනය $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

LHS $\overline{z_1+z_2}$

වලදී z_1+z_2 ලෙස ගනිමු

$z_1+z_2 = x_1 ~~+~~ + iy_1 + x_2 + iy_2$

$z_1+z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$

$\overline{z_1+z_2} = (x_1+x_2) - i(y_1+y_2)$ L①

RHS $\overline{z_1} + \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)$

$= (x_1+x_2) - i(y_1+y_2)$ L②

① = ② $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

සාධනය

$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

LHS $z_1 . z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$= (x_1x_2 + iy_2x_1 + iy_1x_2$
$+ i^2y_1y_2)$

$z_1 . z_2 = (x_1x_2 + i(y_2x_1 + y_1x_2)$
$- y_1y_2)$ L①

$\overline{z_1 z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(y_2x_1 + y_1x_2)$ L①

RHS $\overline{z_1} . \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$

$= (x_1x_2 - i(y_2x_1 + y_1x_2)$
$+ i^2y_1y_2)$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(y_2x_1 + y_1x_2)$ L②

① = ②

$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

$\boxed{08}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක මාපාංකය

අර්ථ දැක්වීම

$z = x + iy$ නම්

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z| = \sqrt{(\text{තාත්වික කොටස})^2 + (\text{අතාත්වික කොටස})^2}$$

① $z = \dfrac{8(3+2i)}{(1-i)}$

$|z|$, $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$ සොයන්න

$z = \dfrac{8(3+2i)(1+i)}{1+1}$

$= 4[3 + 3i + 2i - 2)$

$= 4(1 + 5i)$

$z = 4 + 20i$

$|z| = \sqrt{16 + 400} = 4\sqrt{26}$ //

$\mathrm{Re}\,z = 4$ //

$\mathrm{Im}\,z = 20$ //

ගුණාංගවල

① z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක්නම්

$|1-z|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\,z + |z|^2$ බව පෙන්වන්න

$z = x + iy$ ලෙස ගනිමු

LHS ~~$|1-z|^2$~~

$1 - z$ සොයමු

$1 - z = (1-x) - iy$

$|1-z| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$

$|1-z|^2 = (1-x)^2 + y^2$

$|1-z|^2 = 1 - 2x + x^2 + y^2$

$= 1 - 2x + (x^2 + y^2)$

$= 1 - 2\mathrm{Re}\,z + (x^2 + y^2)$

RHS

$1 - 2\mathrm{Re}\,z + |z|^2$

$= 1 - 2\mathrm{Re}\,z + (x^2 + y^2)$ — ②

① = ②

2 ක්‍රමය ++

$|1-z|^2 =$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$|1-z|^2 = (1-z)(\overline{1-z})$

~~$= 1 + z - \bar{z} + z \cdot \bar{z}$~~

~~$= 1 - z \cdot \bar{z}$~~

$= (1-z)(\bar{1} - \bar{z})$

$= (1-z)(1 - \bar{z})$

$= 1 - \bar{z} - z + z \cdot \bar{z}$

$= 1 - (z + \bar{z}) + z \cdot \bar{z}$

$= 1 - 2\mathrm{Re}\,z + |z|^2$

$=$ RHS //

② $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2$

LHS

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$|z_1 + z_2| = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$ — ①

RHS

$|z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2$

$(x_1^2 + y_1^2) + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) + (x_2^2 + y_2^2)$

$z \cdot \bar{z}_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)$

$= x_1x_2 - i(y_2x_1 - y_1x_2) + y_1y_2$

$z_1\bar{z}_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) - i(y_2x_1 - y_1x_2)$

$\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = (x_1x_2 + y_1y_2)$

$(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) + 2x_1x_2 + 2y_1y_2$

$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$ — ②

① = ②

බහුපද සමීකරණ සංකීර්ණ තුළ

ඕනෑම බහුපද සමීකරණයකට සංකීර්ණ
[illegible]; [illegible]
එම සංඛ්‍යා [illegible] ලැබේ

① සමීකරණ විසඳන්න
$x^2-4x+5=0$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\frac{+4\pm\sqrt{16-4.5}}{2}$

$x=2\pm\frac{\sqrt{-4}}{2}$

$x=2\pm\frac{2}{2}i$

$x=2\pm i$

$x=2+i$ // හෝ $x=2-i$ //

② $x^3=8$ විසඳන්න

$(x^3-2^3)=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$x=2$ // $\quad x^2+2x+4=0$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}$

$x=-1\pm\sqrt{3}i$

$x=-1+\sqrt{3}i$ //

හෝ

$x=-1-\sqrt{3}i$ //

③ $-80-18i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ වර්ගමූලය සොයා,
$4z^2+(16i-4)z+(65+10i)=0$
සමීකරණය විසඳන්න.

$\sqrt{-80-18i}$??

$\sqrt{-80-18i}=x+iy$ ලෙස ගනිමු

$(-80-18i)=(x+iy)^2$

$(-80-18i)=(x^2-y^2)+2xyi$

තාත්වික කොටස

$x^2-y^2=-80$

$80=y^2-x^2$

$80=\frac{-81}{x^2}-x^2$

$80x^2=-81-x^4$

$-80x^2=x^4-81$

~~$-80x^2=4\cdot$~~

$(x^2+81)(x^2-1)=0$

$x^2=-81$ $\quad x=\pm1$

※

$\frac{x=+1}{y=-9}$ $\quad \frac{x=-1}{y=9}$

අතාත්වික කොටස

$2xy=-18$

$xy=-9$

$y=-9/x$

$\sqrt{-80-18i}=1+9i$

$\sqrt{-80-18i}=-1+9i$

$4z^2+(16i-4)z+(65+10i)=0$

$z=\frac{-(16i-4)\pm\sqrt{(16i-4)^2-16(65+10i)}}{8}$

$z=-\frac{(16i-4)}{8}\pm2\sqrt{(4i-1)^2-(65+10i)}$

$z=\frac{(1-4i)\pm\sqrt{-80-18i}}{2}$

(+)

$z=\frac{(1-4i)+(1-9i)}{2}$

$z=\frac{2-13i}{2}$ //

$z=\frac{(1-4i)+(-1+9i)}{2}$

$z=\frac{5i}{2}$

(-)

↓

③ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 13$ වේ

$f(x) = 0$ හි මූලයක් $(2+3i)$ නම්

අනෙක් මූල සොයන්න

$2+3i \;,\; 2-3i$

$\alpha+\beta+\gamma = -\left(\frac{-3}{1}\right)$

$4+\gamma = \frac{+3}{1}$

$\gamma = +3 - 4$

$\gamma = -1$ //

$-1 ,\; 2+3i ,\; 2-3i$ //

(+1) හි ඝන මූල

$1^{1/3} = x$ ලෙස ගනිමු

$1 = x^3$

$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x = 1$ // $\qquad x^2 + x + 1 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$

$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i$

$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ //

(−1) හි ඝන මූල

$(-1)^{1/3} = x$ ලෙස ගනිමු

$x^3 = -1$

$x^3 + 1 = 0$

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x = -1 \qquad x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$x = +\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ //

සාරාංශය

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 \text{ හි සංකීර්ණ ඝන මූලයක් } \\ \omega \text{ නම් අනෙක } \omega^2 \text{ වන අතර} \\ 1+\omega+\omega^2 = 0 \\ \omega^3 = 1 \end{array}}$$

① (i) $\cancel{x}^3 = 1$

(ii) x හි සංකීර්ණ මූලයක් ω නම් ω^2 බව පෙන්වන්න

(iii) $1+\omega+\omega^2 = 0$ බව ; $\omega^3 = 1$ බව පෙන්වන්න

(iv) පහත එක් එක් ප්‍රකාශනයේ අගය සොයන්න

(a) ω^6

(b) $\omega^4 + \omega^5$

(c) $(1+\omega+3\omega^2)^3$

(d) $(1+4\omega+\omega^2)^6$

(i) ✓

(ii) $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ නම්

$\omega^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{3}{4}(i)^2$

$= -\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ //

(iii) $1+\omega+\omega^2$

$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cancel{+\frac{\sqrt{3}}{2} i} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cancel{-\frac{\sqrt{3}}{2} i}$

$= 1 - 1 = 0$ //

$\omega^3 = \omega^2 \cdot \omega$

$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ //

(a) $\omega^6 = (\omega^3)^2 = 1$ //

(b) $\omega^4 + \omega^5 = \omega^3(\omega + \omega^2)$

$= 1(\omega + \omega^2)$

$= 1 \cdot -1 = -1$ //

(c) $(1 + \omega + \omega^2 + 2\omega^2)^3 = (0 + 2\omega^2)^3$

$= (2\omega^2)^3$

$= 8 \cdot 1^2$

$= 8$ //

(d) $(1+\omega+\omega^2+3\omega)^6$

$= (0 + 3\omega)^6$

$= 3^6 \cdot \omega^{3 \cdot 2}$

$= 3^6 = 729$ //

සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක මාපාංකය

ධ්‍රැවක ආකාරය

$z = x + iy$

$z = \sqrt{x^2+y^2}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$

$z = \sqrt{x^2+y^2}\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$

$z = r\left[\cos(\theta) + i\sin\theta\right]$

r ↗ මාපාංකය z, $|z|$

$\cos(\theta)$ ↑ විස්තාරය z, arg z

$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$

විස්තාරය ~~z~~ $= \theta$

arg $z = \theta$

මෙහි $r > 0$ විය යුතුය

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ හෝ $-\pi \leq \theta \leq \pi$

① පහත එක් එක් සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවට මාපාංකය, ධ්‍රැවක ආකාරයට ලියන්න.

1) $\omega = (1+i)^2$

$\omega = 2i$

$\omega = 0 + 2i$ $\quad \sqrt{0^2+4}$, $\sqrt{4} = 2$

$\omega = 2[0 + 1i]$

$\omega = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\, i\right]$

$|\omega| = 2$ //

$\arg\omega = \frac{\pi}{2}$ //

2) $z = 3 + 4i$

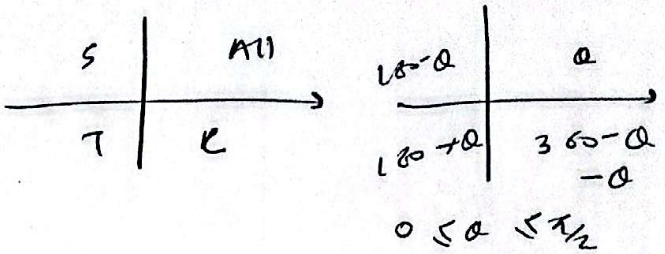
$z = 5\left[\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right]$ $\quad \sqrt{9+16}$, 5

$z = 5(\cos\theta + i\sin\theta]$

$\arg z = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ හෝ $\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ //

$|z| = 5$ //

Noter ත්‍රිකෝණමිතිය ✗

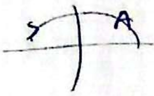


② පහත එක් එක් සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවල මාපාංකය, ධ්‍රැවක ආකාරයෙන් ලියන්න.

1) $z = -\sqrt{3} + i$ $\quad \sqrt{3+1}$, 2

$z = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$

$z = 2\left[\cos\theta + \sin\theta\, i\right]$



$|z| = 2$ $\quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

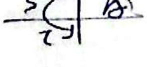
$\arg z = \pi - \frac{\pi}{6}$

$\arg z = \frac{5\pi}{6}$ //

2) $z = -\sqrt{3} - i$ $\quad \sqrt{3+1}$, 2

$z = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right]$

$z = 2\left[\cos\theta + \sin\theta\, i\right]$



$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$|z| = 2$

$\arg z = \frac{7\pi}{6}$ //

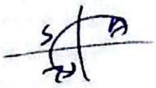
3) $z = -1 - i$

$\sqrt{1+1}$

$\sqrt{2}$

$z = \sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right]$

$z = \sqrt{2}[\cos\theta + \sin\theta\, i]$



$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$|z| = \sqrt{2}$

$\arg z = \frac{5\pi}{4}$ /

4) $z = \cos\alpha - i\sin\alpha$

$z = 1\,[\cos\alpha + (-\sin(-\alpha))i]$

$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

$-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$

$\arg z = (-\alpha)$ //

$|z| = 1$ //

5) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ නම්

$(1+z)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ

මාපාංකය හා විස්තාරය සොයන්න

$(0 < \theta < \pi)$

$(1+z) = \textcircled{1} + \cos\theta + i\sin\theta$

1 ඉවත් කරගැනීම

$(1+z) = \cancel{1} + 2\cos^2\frac{\theta}{2} \cancel{-1} + i\sin\theta$

$(1+z) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + i\sin\theta$

[illegible] ලෙස ආදේශය

$(1+z) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, i$

$(1+z) = \cos\frac{\theta}{2}^{2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right]$

$|1+z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ //

$\arg(1+z) = \frac{\theta}{2}$ //

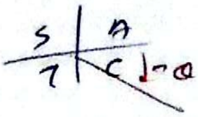
6) $z = \sqrt{3} - i$

$\sqrt{3+1}$

2

$z = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right]$

$z = 2[\cos\theta + \sin\theta\, i]$



$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$|z| = 2$ //, $\arg z = -\frac{\pi}{6}$ //

සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවල වැදගත් ලක්ෂණ

$\boxed{01}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ගුණ කිරීම.

මාපාංක ගුණවේ

විස්තාර එකතුවේ.

$z_1 = r_1[\cos\theta_1 + \sin\theta_1\, i]$

$z_2 = r_2[\cos\theta_2 + \sin\theta_2\, i]$

$$\boxed{z_1 . z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

$|z_1 z_2| = r_1 r_2$

$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$

$|z_1 z_2| = |z_1| . |z_2|$

$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

$\boxed{02}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා බෙදීමේදී

මාපාංක බෙදේ

විස්තාර අඩුවේ

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}$

$\arg(z_1/z_2) = \theta_1 - \theta_2$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

① $z = 1+i$ නම්

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ආකාරයට ප්‍රකාශකර

z^2, z^3, z^4 සොයන්න.

$z = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right]$

$z = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$r = \sqrt{2}$ $\quad \theta = \pi/4$

$z^2 = z.z$

$= \sqrt{2}\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$z^2 = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\pi/2\right]$

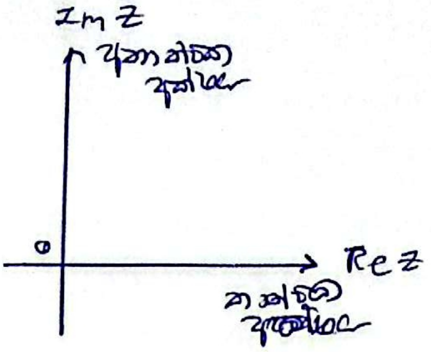
$z^3 = z^2.z$

$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$z^4 = z^3.z$

$= 4\left[\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right]$

ආගන්ඩ් සටහන

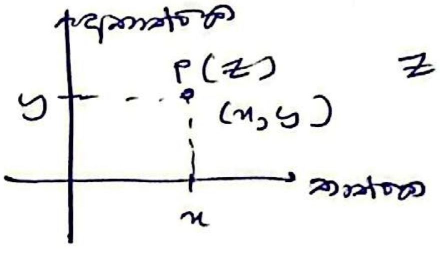


- ජ්‍යාමිතිකමයව සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් නිරූපණය කෙරේ
- ලක්ෂ්‍යයන් හා කාටීසියන අක්ෂ 3ක් මාධ්‍යයෙන් නිරූපණය කෙරේ
- එම ලක්ෂ්‍යය හා ප්‍රත්‍යක්ෂ අක්ෂ මාපාංකය සහ arg නිරූපණය කෙරේ

$\boxed{01}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක්

~~z~~ $= x+iy$ ආකාරයේ ප්‍රකාශනව

ආගන්ඩ්සටහනෙහි ලකුණු කිරීම.

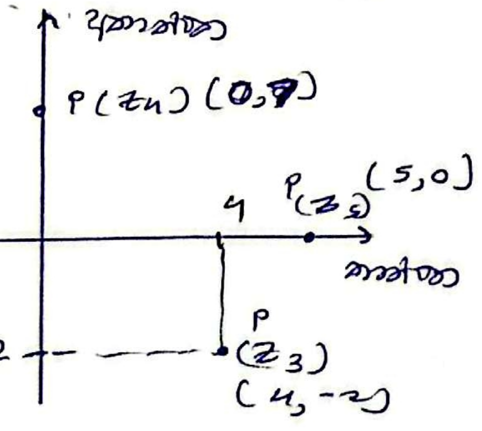


$z = x+iy$

② $z_3 = 4-2i$

$z_4 = 7i$

$z_5 = 5$ ඒවා ආගන්ඩ් සටහනෙහි ලකුණුකරන්න



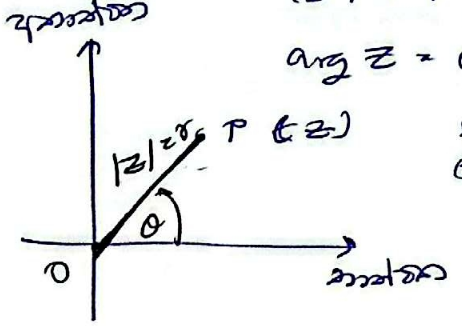
$\boxed{02}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ආගන්ඩ ලකුණු කිරීම

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$|z| = r$ = OP දුර (මූලලක්ෂ්‍යයේ සිට)

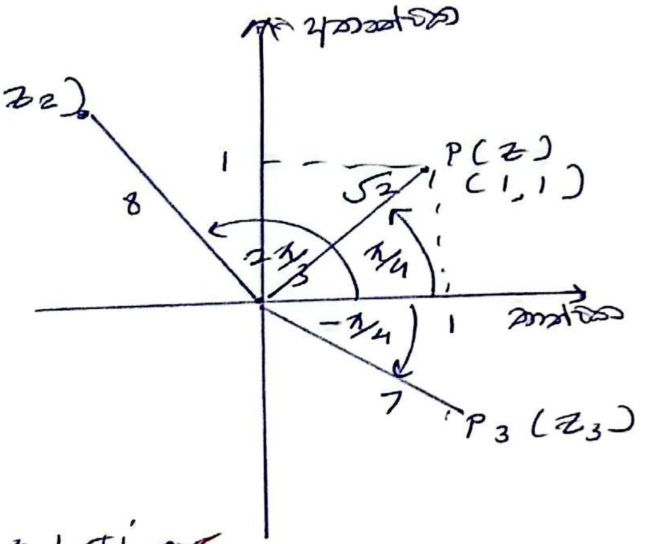
$\arg z = \theta$ = OP රේඛාව x අක්ෂයේ ධනදිශාව සමඟ සාදන කෝණය



① $z_2 = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} i\right)$

$z_3 = 7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$z = 1 + i$ ආගන්ඩ් සටහනේ ලකුණු කරන්න



$z = 1 + i$ or

$z = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

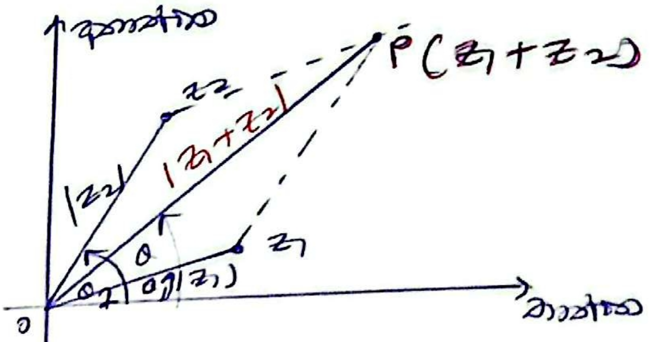
ආගන්ඩ් සටහන ආශ්‍රිත නිර්මාණ

$\boxed{01}$ $z_1 + z_2$ නිර්මාණය

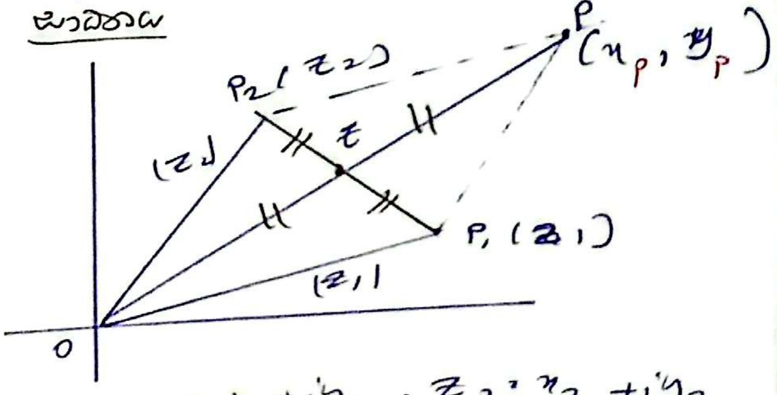
① z_1, z_2 ලකුණු කර මූලලක්ෂ්‍ය හා යා කරන්න $|z_1|$, $|z_2|$ වේ

② එම රේඛා දෙක සමාන්තරාස්‍රයක බද්ධ පාද දෙකක් වනසේ ඉතිරි පාද දෙක නිර්මාණය කර මූලලක්ෂ්‍යයට ප්‍රතිවිරුද්ධ ලක්ෂ්‍ය හා මූලලක්ෂ්‍ය හා යා කරන ඛණ්ඩයේ $|z_1 + z_2|$ වේ

ප්‍රතිවිරුද්ධ ලක්ෂ්‍ය $P = z_1 + z_2$ වේ



සාධනය



$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$z = \left(\frac{x_p}{2} ; \frac{y_p}{2}\right)$ — ①

$z = \left[\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$ — ②

① = ② $x_p = x_1 + x_2$, $y_p = y_1 + y_2$

$z_p = x_p + iy_p$

$z_p = x_1 + x_2 + iy_1 + iy_2$

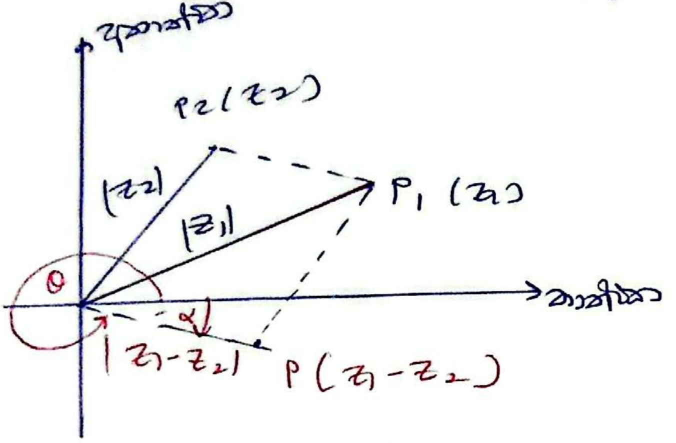
$z_p = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$

$z_p = z_1 + z_2$ //

$\boxed{02}$ $z_1 - z_2$ නිරූපණය

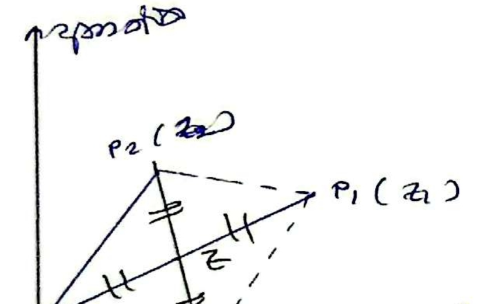
① z_1 , z_2 ලකුණු කර මූලලක්ෂ්‍යය හා යා කරන්න $|z_1|$, $|z_2|$ ලෙස

② ඉතිරිව දී ඇති සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය ($|z_1|$) නිරූපණය වන සේ (−) දෙසට ඇඳ සමාන්තරාස්‍රය සම්පූර්ණ කරන්න



③ ලැබෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය වන ලක්ෂ්‍යය $(z_1 - z_2)$ ලෙස

සාධනය



$z = \left(\frac{x_1}{2} ; \frac{y_1}{2}\right)$ —①

$z = \left[\frac{x_2 + x_p}{2} ; \frac{y_2 + y_p}{2}\right]$ —②

$① = ②$ $x_p + x_2 = x_1$, $y_2 + y_p = y_1$

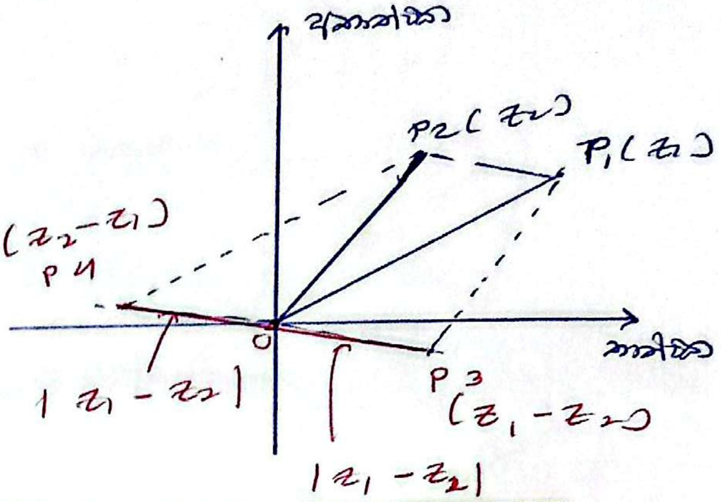
$x_p = x_1 - x_2$ $y_p = y_1 - y_2$

$z_p = x_p + iy_p$

$z_p = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)$

$z_p = z_1 - z_2$ //

$(z_1 - z_2)$ හා $(z_2 - z_1)$ නිරූපණය



$$\boxed{\begin{array}{c} P_1P_2 = OP_3 = OP_4 \\ |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2| \end{array}}$$

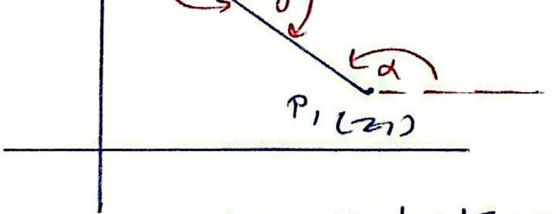
P_4, O, P_3 ලක්ෂ්‍ය සරල රේඛාවක පිහිටයි

$(z_1 - z_2)$ හා $(z_2 - z_1)$ නිරූපණය කොතරම් arg වෙනස්ව නිරූපණය වේද.

පියවර ① z_1 , z_2 ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කරන්න

② $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ මාපාංක සමානවෙනවා නමුත් arg වෙනස්වේ

③ දී ඇති සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ සිට ධනව රේඛාවක් x අක්ෂ දිශාවට ඇඳිය යුතුය P₁ P₂ රේඛාවට ඇති කෝණය arg වේ



① $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| = P_1P_2$

② $\arg(z_2 - \underline{z_1}) ~~= \arg(\alpha)~~ = \alpha$

$\arg(z_1 - \underline{\underline{z_2}}) ~~= \arg(\theta)~~ = \theta$

or

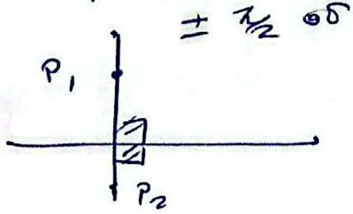
$~~= \arg(-\gamma)~~ = (-\gamma)$

Note: සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් පූර්ණ කාල්පනිකනම්

x = 0 විට

z = iy ආකාරයේ

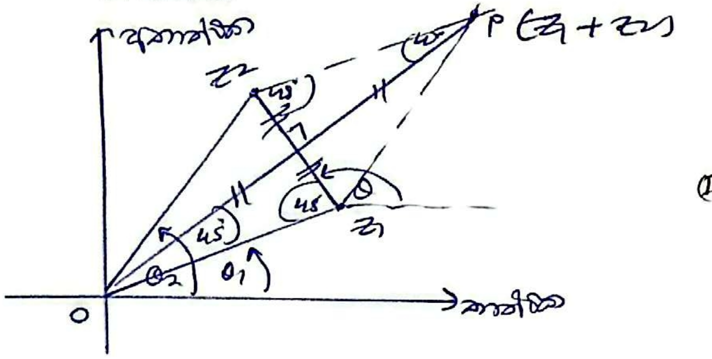
∴ ප්‍රධාන විස්තාරය ± $\pi/2$ වේ



① z_1 z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වේ

I) $z_1 + z_2$ ලකුණු කරමු

II) $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ නම් arg z_1 හා arg z_2 අතර වෙනස සොයන්න



විකර්ණ සමාන වේ

∴ O P P_1 P_2 සමාන්තරාස්‍රය ~~රොම්බසයකි~~ සෘජුකෝණාස්‍රයක් වේ

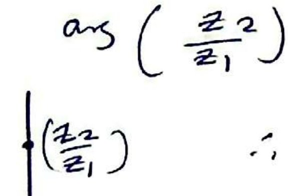
∴ $|z_1| = |z_2|$

$\arg(z_1) = 0$

$\arg(z_2) = \pi/2$

$\arg z_2 - \arg z_1 = \frac{\pi}{2}$

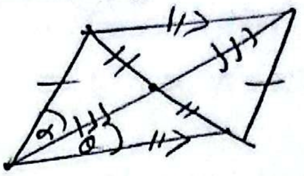
$\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \pi/2$



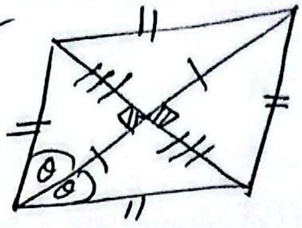
∴ $\frac{z_2}{z_1}$ පූර්ණ කාල්පනිකයකි

$\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\pi}{2}$ නිසා

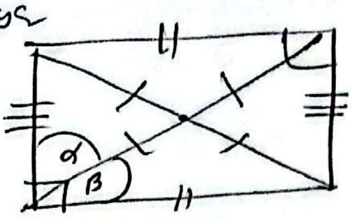
Note: ① සමාන්තරාස්‍රය



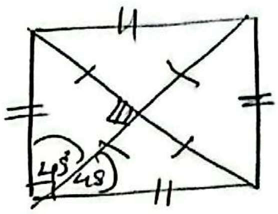
② රොම්බසය



③ සෘජුකෝණාස්‍රය



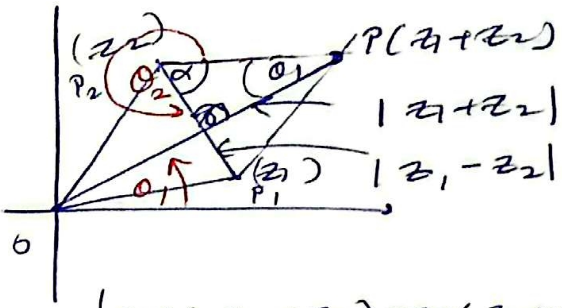
④ සමචතුරස්‍රය



② z_1, z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වන $z_1 + z_2$ ලකුණු කරමු

(II) $\left|\arg\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)\right| = \frac{\pi}{2}$ නම්

$|z_1| = |z_2|$ බව පෙන්වන්න



$|\arg(z_1+z_2) - \arg(z_1+\underline{\underline{z_2}})| = \frac{\pi}{2}$

$|\theta_1 - \theta_2| = \pi/2$

$\alpha = (180 - \theta_2)$

$\alpha + \gamma + \theta_1 = 180°$

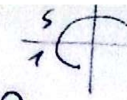
$\gamma = 180° - 180 + \theta_2 - \theta_1$

$\gamma = \theta_2 - \theta_1$

$\gamma = \pi/2$

විකර්ණ ලම්බකවන බැවින් රොම්බසයකි

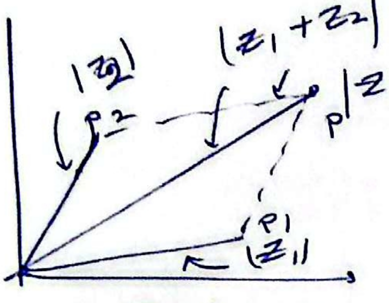
$|z_1| = |z_2|$ වේ // [∵ $OP_1 = OP_2$]

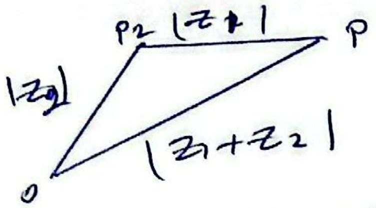


③ z_1, z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා 2ක් නම්

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$$

බව පෙන්වන්න





O P_2 P Δ සැලකීමෙන්,

Δ ක ඕනෑම පාද 2ක
ඓක්‍යය අනෙක් පාදයේ දිග
වඩා විශාල හෝ සමාන විය යුතුය

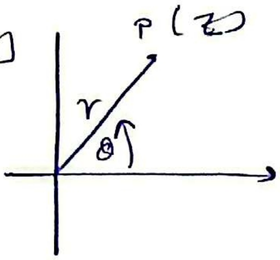
$OP_2 + PP_2 \geq OP$ විය යුතුය

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$$

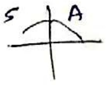
සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආශ්‍රිත තවත් පැහැදිලිකිරීම්

01 z ලකුණු කිරීම

$z = r\,[\cos\theta + i\sin\theta]$



02 iz නිරූපණය

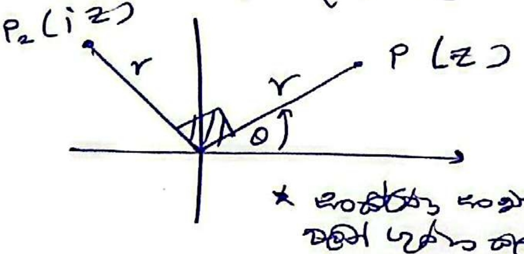


$iz = ir\,[\cos\theta + i\sin\theta]$

$iz = r\,[i\cos\theta + i^2\sin\theta]$

$iz = r\,[-\sin\theta + i\cos\theta]$

$iz = r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$

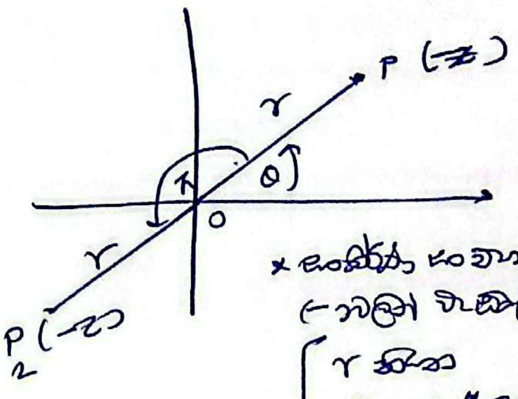


* සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවකට i වලින් ගුණ කළවිට
$\left[\begin{array}{l} r \text{ නියත} \\ \theta \rightarrow 90^\circ+\theta \text{ වේ} \end{array}\right]$

03 −z නිරූපණය

$-z = r\,(-\cos\theta - i\sin\theta)$

$-z = r\,[\cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)]$



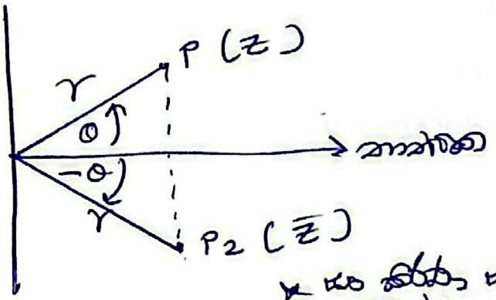
* සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් (−1)න් ගුණ කළවිට
$\left[\begin{array}{l} r \text{ නියත} \\ \theta \rightarrow 180+\theta \text{ වේ} \end{array}\right]$

z, −z ලක්ෂ්‍ය එකම
සරල රේඛාවක පිහිටයි

04 $\bar{z}$ නිරූපණය

$\bar{z} = r\,(\cos\theta - i\sin\theta)$

$\bar{z} = r\,[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$



* සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක ප්‍රතිබිම්බය
$\left[\begin{array}{l} r \text{ නියත} \\ \theta \rightarrow (-\theta) \text{ වේ} \end{array}\right]$

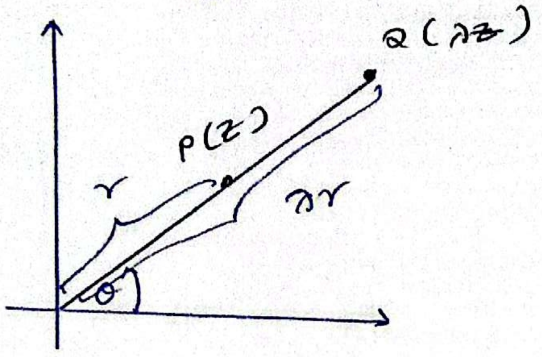
z වල තාත්වික අක්ෂය
හරහා ප්‍රතිබිම්බය $\bar{z}$ වේ

⓪⑤ λz ගුණිතය $(\lambda > 0)$

සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් (λ) නියතයකින් ගුණ කිරීමේදී

දිශාව වෙනස් නොවේ.

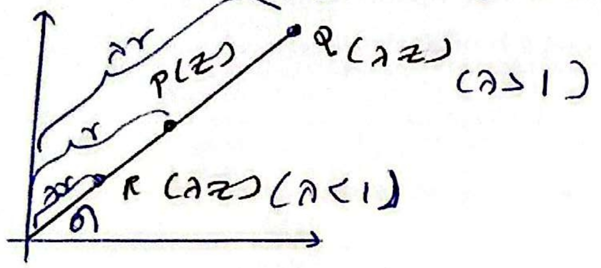
මාපාංකය එම නියතයේ ගුණාකාරයකින් විශාල වේ.



$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$\times \lambda$

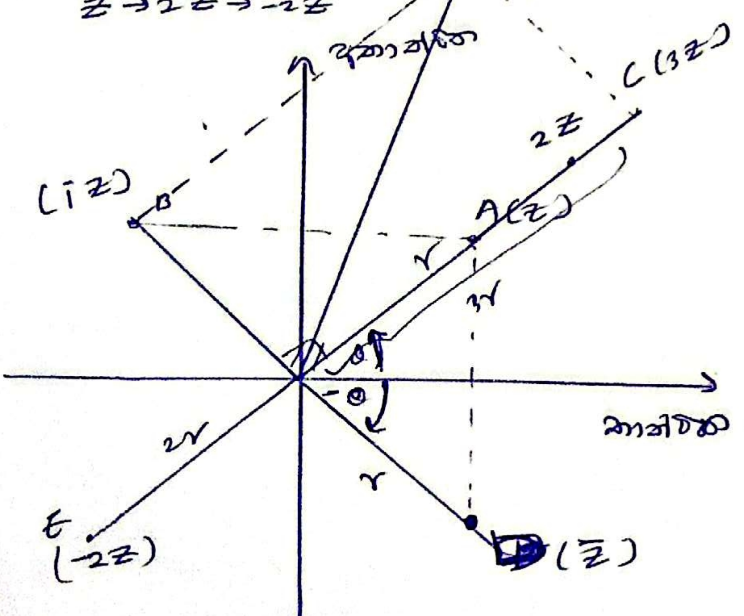
$$\lambda z = \lambda r(\cos\theta + i\sin\theta)$$



① $z = x + iy$ වේ $(x>0, y>0)$
පහත එවා ආගන්ඩ් සටහනක ලකුණු කරන්න.

(I) z (II) iz
(III) $3z$ (IV) $\bar{z}$
(V) $-2z$ (VI) $iz + 3z$

$z \rightarrow 2z \rightarrow -2z$



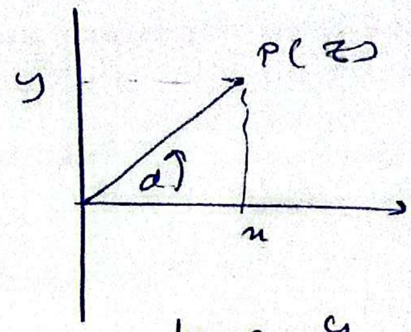
② $z = x + iy$ වේ. $(x>0, y>0)$

i) z ලක්ෂ්‍යය $y = 2x$ මත වේ.
arg z සොයන්න

ii) $3iz$, $2z$ ලකුණු කරන්න

iii) $3iz + 2z$ ලකුණු කරන්න
$|z| = r$ නම්
$|3iz + 2z|$ සොයන්න.

~~විසඳුම~~



i) $\arg z = \frac{y}{x}$

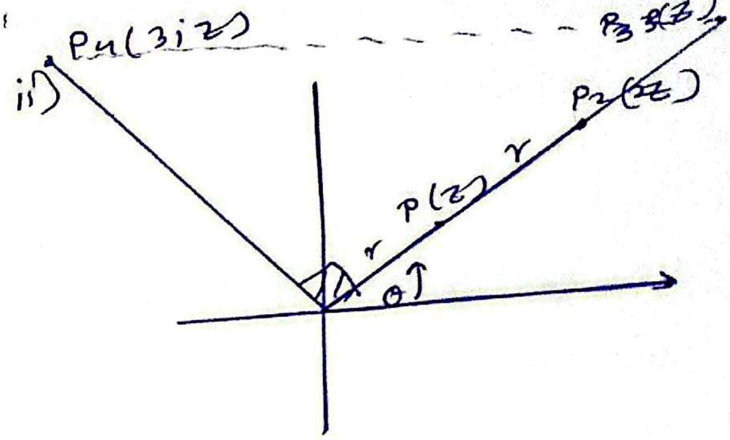
$\arg z = $

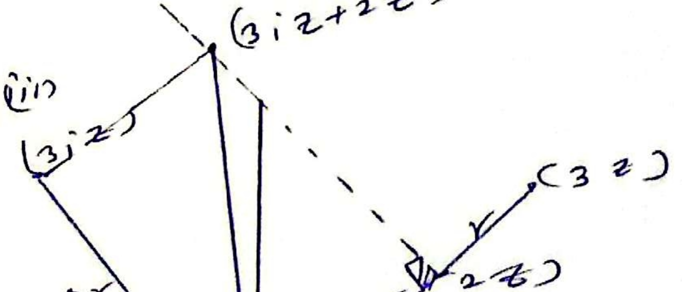
$\arg z = \tan^{-1}2$

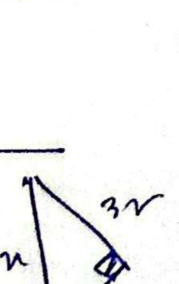
$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\tan\theta = 2$

$\theta = \tan^{-1}2$







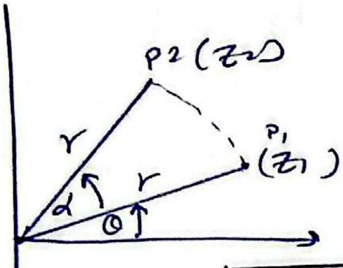
$x = \sqrt{13}\, r$

$|3iz + 2z| = \sqrt{13}\, r$

භ්‍රමණ සිද්ධාන්තය

01 මූල ලක්ෂ්‍යය වටා භ්‍රමණය

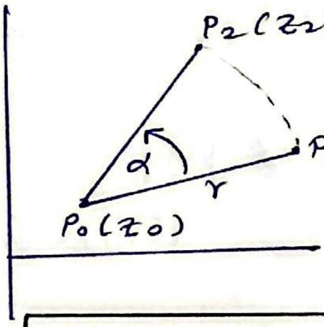
z_1 මූල ලක්ෂ්‍යය වටා
වාමාවර්තව ~~භ්‍රමණ~~ α කෝණයකින්
භ්‍රමණය කළවිට නව සංකීර්ණ
සංඛ්‍යාව z_2 නම්



$$\boxed{z_2 = z_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$$

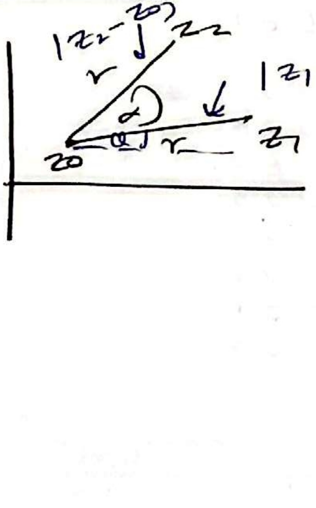
02 සාමාන්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් වටා භ්‍රමණය

z_1, z_0 වටා α කෝණයකින්
වාමාවර්තව භ්‍රමණය කළවිට
නව සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව z_2 නම්;



$$\boxed{(z_2 - z_0) = (z_1 - z_0)(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$$

සාධනය



$(z_2 - z_0) = (z_1 - z_0)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ බව

(i) මාපාංක සමානකම

LHS/ $|z_2 - z_0| = r$ — ①

RHS/ $|z_1 - z_0| = r$ — ②

① = ② ∴ මාපාංකය සමානයි

(2) විස්තාර සමානකම.

LHS/ $\arg(z_2 - z_0) = \theta + \alpha$ — ①

RHS/

$\arg[(z_1 - z_0)(\cos\alpha + i\sin\alpha)]$

$\arg AB = \arg A + \arg B$

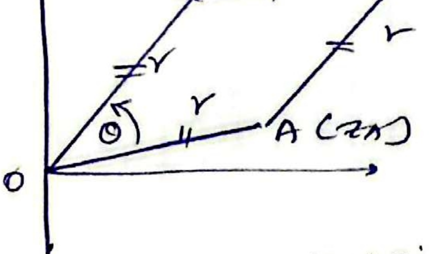
$\arg(z_1 - z_0) + \arg[\cos\alpha + i\sin\alpha]$

$\theta + \alpha$ — ②

① = ② ∴ විස්තාර සමානයි.

∴ ප්‍රකාශනය සත්‍යයි

2. උදා: OABC රොම්බසයක් ද
O මූලය සමපාත වේ.
$\theta = \sin^{-1}(4/5)$ වේ
$A\hat{O}C = \theta$ වේ.
$z_A = 10 + 5i$ නම් z_C සොයන්න



$z_A = 10 + 5i$

$z_C = z_A(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z_C = (10 + 5i)\left(\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right)$

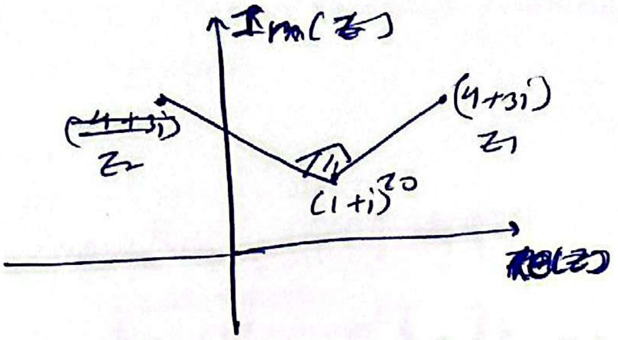
~~$= \frac{30}{4} + i\frac{20}{2} + \frac{15}{4}i - \frac{20}{4}$~~

~~$= \frac{5}{4} + \frac{65}{4}i$~~

$z_C = 6 + i8 + 3i - 4$

$z_C = 2 + 4i$ //

උදා ② 4+3i , 1+i වල
[illegible]
$\frac{\pi}{2}$ ක් [illegible]



$(z_2 - z_0) = (z_1 - z_0)(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$(z_2 - 1 - i) = (3+2i)(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

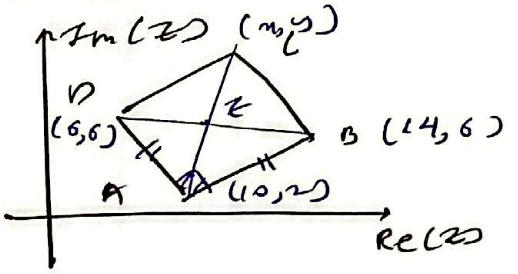
$z_2 - 1 - i = (3+2i)[+i]$

$= 3i - 2 + 1 + i$

$z_2 = -1 + 4i$ //

උදා ③ ABCD සමචතුරස්‍රයකි
$z_A = 10+2i$
$z_B = 14+6i$ වේ

i) z_D සොයන්න
(ii) z_C සොයන්න



~~AB = √~~

z_D/ $(z_D - z_A) = (z_B - z_A)(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$(z_D - 10 - 2i) = (4+4i)(i)$

$z_D = 4i - 4 + 10 + 2i$

$z_D = 6 + 6i$

[illegible] විකර්ණ [illegible]
[illegible]

$z = \left[\frac{20}{2}, \frac{12}{2}\right]$

$z = (10, 6)$

$(10, 6) = \left[\frac{10+x}{2}, \frac{y+2}{2}\right]$

$20 - 10 = x$	$12 - 2 = y$
$x = 10$	$y = 10$

$C = (10, 10)$

$z_C = 10 + 10i$ //

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

උදා ① $\omega = \sqrt{3} - i$
I) ω^6 සොයන්න

$\omega = \sqrt{3+1}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right]$

$\omega = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right]$

$\omega^6 = 2^6\left[\cos 6\frac{\pi}{6} - i\sin 6\frac{\pi}{6}\right]$

$\omega^6 = 2^6[-1 - i.0]$

$\omega^6 = -64$ //

ගණිතාභ්‍යුහන සාධනය

n ධන නිඛිලයක් සඳහා
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
බව සාධනය කරන්න.

n=1

LHS

$\cos\theta + i\sin\theta$

RHS

$\cos\theta + i\sin\theta$

LHS = RHS
∴ n=1 විට සත්‍යයි

n=p විට සත්‍ය යැයි
උපකල්පනය කරමු.

~~LHS~~
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^p = \cos p\theta + i\sin p\theta \quad — ①$$

n=p+1 විට

$$\{\cos(p+1)\theta + i\sin(p+1)\theta\}$$

LHS

$(\cos\theta + i\sin\theta)^{p+1}$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^p \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$

$(\cos p\theta + i\sin p\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$

සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවල
ගුණනය කිරීම

1. $(\cos(p+1)\theta + i\sin(p+1)\theta)$

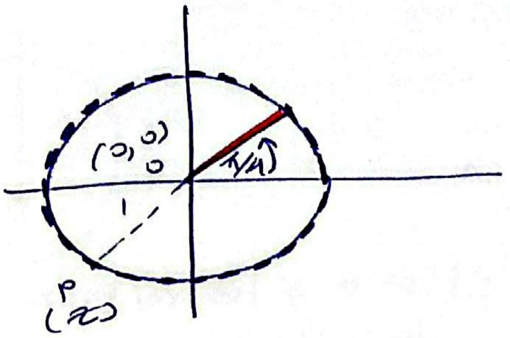
$\cos(p+1)\theta + i\sin(p+1)\theta$

∴ n=p+1 විට සත්‍ය වේ.

∴ ගණිත අභ්‍යුහන
මූලධර්මය අනුව
ඉහත ප්‍රතිඵලය
සියලු ධන නිඛිල සඳහා
සත්‍ය වේ

Extra

① $|z| < 1$ හා $\text{Arg } z = \frac{\pi}{4}$
ආගන්ඩ් සටහනේ z ලක්ෂ්‍යයේ

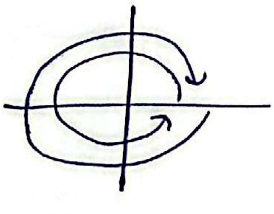


විස්තාරය හා ප්‍රධාන විස්තාරය
[arg(z)] (Arg z)

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ නම්

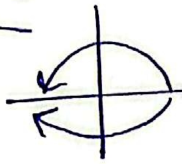
① විස්තාරය (arg z)

$0 \leq \theta \leq 2\pi$
හෝ
$-\pi \leq \theta \leq \pi$

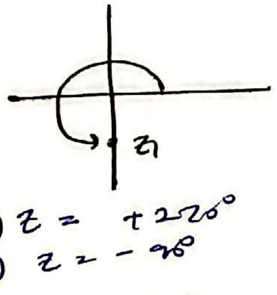


② ප්‍රධාන විස්තාරය (Arg z)

$-\pi \leq \theta \leq \pi$

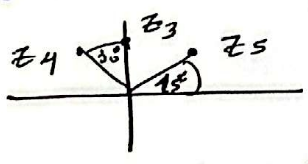


උදා:



$\text{Arg } z = +270^\circ$
$\arg z = -90^\circ$
$\text{Arg } z = -90^\circ$

උදා:



$\text{Arg } z_5 = \arg z_5 = 45^\circ$
$\text{Arg } z_3 = \arg z_3 = 90^\circ$
$\text{Arg } z_4 = \arg z_4 = 120^\circ$

පථයන් ආශ්‍රිත ගැටළු

පථයන් ආශ්‍රිත ගැටළු

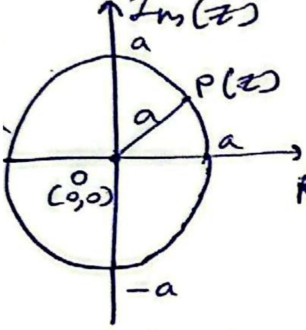
- ① මාපාංක ආශ්‍රිත ගැටළු
- ② විස්තාර ආශ්‍රිත ගැටළු
- ③ තාත්වික කොටස් ආශ්‍රිත ගැටළු
- ④ අතාත්වික කොටස් ආශ්‍රිත ගැටළු

01 මාපාංක ආශ්‍රිත ගැටළු

කේන්ද්‍රය, අරය පථය ආදිය ලකුණු කරන්න

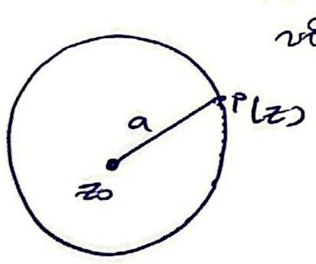
(I) $|z| = a$ වන පථය

පිළි/ කේන්ද්‍රය මූල ලක්ෂ්‍යය වන a අරය වන වෘත්තයක් ආකෘතිය. එම වෘත්තයේ පරිධිය මත z පිහිටයි.



(II) $|z - z_0| = a$ වන පථය

පිළි/ කේන්ද්‍රය z_0 වන ලක්ෂ්‍යය හා අරය a වන වෘත්තයේ පරිධිය මත z පිහිටයි



(III) කේන්ද්‍රය හා අරය සෙවීම

ක්‍රමය/ $z = x + iy$ ලෙස ගෙන මාපාංක ගෙන එම අගය සමාන කර කේන්ද්‍රය හා අරය ලබා ගැනීම
(වෘත්තයක සමීකරණයේ ආකාරයෙන්)

(III) උදා ① $|z| = 3$ වන පථය අඳින්න

$$z = x + iy$$

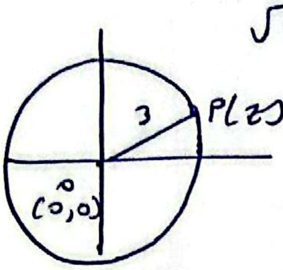
$$|x + iy| = 3$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$$r = 3$$

$$O = (0, 0)$$



(III) උදා ② $|z - 4 - 3i| = 1$ වන පථය අඳින්න

$$z = x + iy$$

$$|x + iy - 4 - 3i| = 1$$

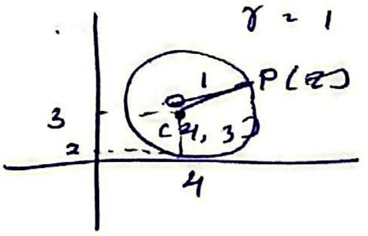
$$|(x - 4) + (y - 3)i| = 1$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 1$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1^2$$

$$O = (4, 3)$$

$$r = 1$$



(III) උදා ③ $|z - 2i| = |z + 3|$ වන පථය අඳින්න

$z = x + iy$ ලෙස ගනිමු

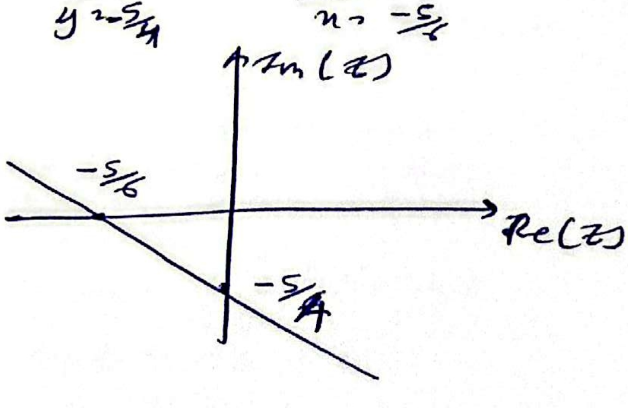
$$|x + (y-2)i| = |(x+3) + iy|$$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2}$$

$$6x + 4y + 5 = 0$$

$x = 0$	$y = 0$
$y = -\frac{5}{4}$	$x = -\frac{5}{6}$



(II) උදා: ④ $|z - 5i| = 1$

(i) z පථය අඳින්න

(ii) $|z|$ අවම $|z|$ උපරිම

(iii) $|z - 3i|$ අවම

(iv) $|z - 3i|$ උපරිම

(v) $|z + 2i|$ අවම

$z = x + iy$

$|x + (y-5)i| = 1$

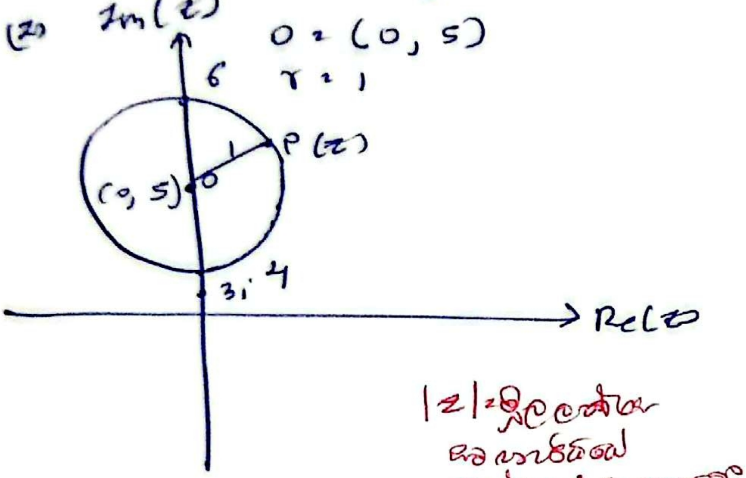
$\sqrt{x^2 + (y-5)^2} = 1$

$x^2 + (y-5)^2 = 1^2$

(i)

$O = (0, 5)$

$r = 1$



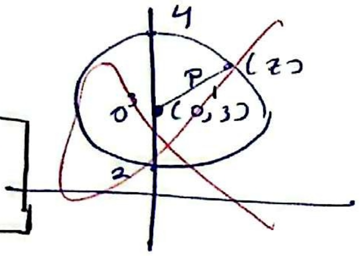
|z| = මූල ලක්ෂ්‍යය සිට පරිධියේ ලක්ෂ්‍යයක් දක්වා දුර
36

(ii) $|z|_{අවම} = 4$

$|z|_{උපරිම} = 6$

(iii) $\underset{\sim}{|z - 3i|_{අවම}}$

2



$$\boxed{|z - 3i|_{අවම} = |z|_{අවම} - 3}$$

$= 4 - 3$

$|z - 3i|_{අවම} = 1$

(iv) $|z - 3i|_{උපරිම} = |z|_{උපරිම} - 3$

$= 6 - 3$

$= 3$

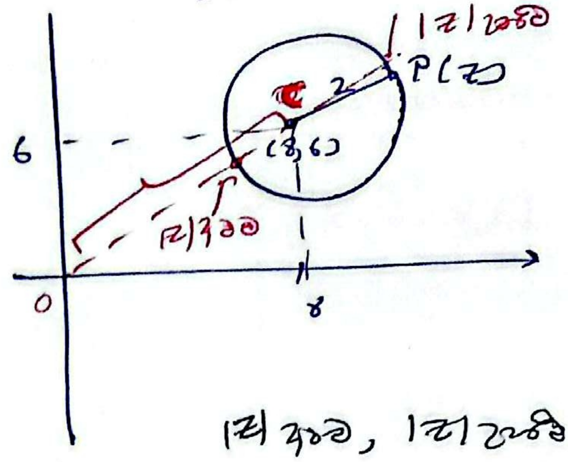
(v) $\boxed{|z + 2i|_{අවම} = |z|_{අවම} + 2}$

$= 4 + 2 = 6$

(ii), (iii) උදා: ① $|z - 8 - 6i| = 2$

$|z - \underbrace{(8+6i)}_{z_0}| = 2$

$z_0 = (8 + 6i)$

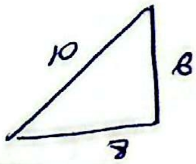


|z| අවම, |z| උපරිම

* මාපාංක අගයන්හි උපරිම අවම,
කේන්ද්‍රය මූලලක්ෂ්‍යයට යා කරන
රේඛාව හා වෘත්තයේ ඡේදන
ලක්ෂ්‍ය මගින් ලැබේ

$|z|_{අවම} = 10 - 2$

$= 8$



$|z|_{උපරිම} = 10 + 2$

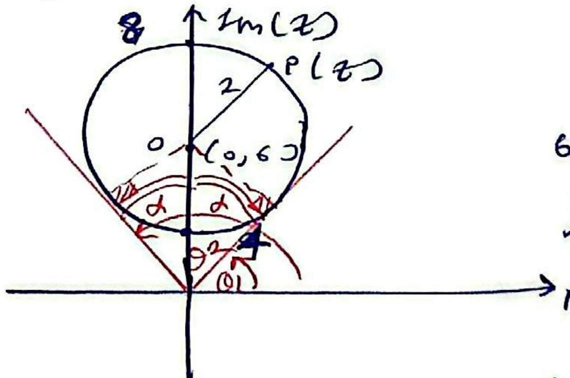
$= 12$

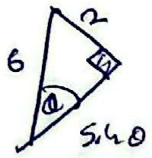
$$\boxed{\begin{aligned} |z|_{අවම} &= OC - අරය \\ |z|_{උපරිම} &= OC + අරය \end{aligned}}$$

(ii), (iii) උදා: ② $|z - 6i| = 2$

Arg z අවම, Arg z උපරිම

$|z - 6i| = 2, \quad z_0 = 0 - 6i$





$\sin\theta = \frac{1}{3}$

$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

* විස්තාර වල උපරිම අවම අගයන්
කේන්ද්‍රය මූලලක්ෂ්‍යයට යා කරන
රේඛාව හා පරිධිය මත ස්පර්ශකයන්
මගින් ලැබේ

Arg $z_{අවම} = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

Arg $z_{උපරිම} = 2\theta + \theta_1$

Arg $z_{උපරිම} = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$\boxed{02}$ / $\boxed{03}$

තාත්වික / අතාත්වික කොටස් ආශ්‍රිත ගැටළු

සිහිපත්:

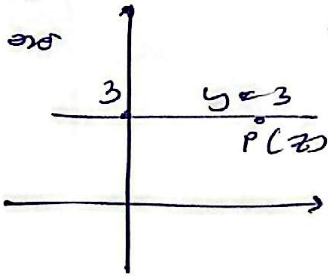
Re (z) – තාත්වික කොටස
Im (z) – අතාත්වික කොටස

- z = x+iy ලෙස ගෙන [illegible]
- ගැටළුවලදී පථයන් 2ක් ඇඳීමෙන් z සොයාගැනීමේදී එම පථයන් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය වලින් z ලැබෙයි

උදා: ① $Im(z) = 3$

$z = x+iy$ ගත්

$3 = y$
$y = 3$



උදා ② $Re[z-4-2i] = 3$
(i) z පථය
(ii) $|z|$ අවම

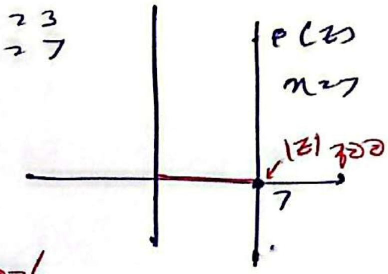
$z = x+iy$ ගත්

$Re[x+iy-4-2i] = 3$

$Re[(x-4)+i(y-2)] = 3$

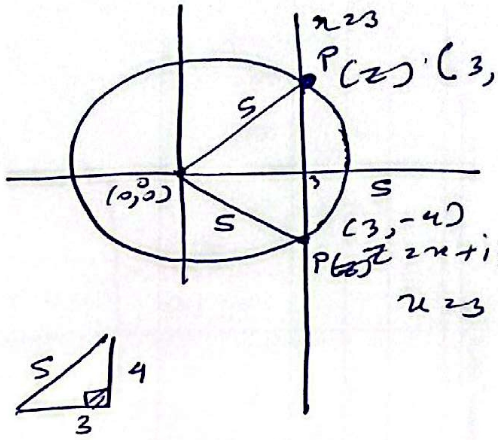
$x-4 = 3$
$x = 7$

$|z|_{අවම} = 7$ //



ලම්බකයක් ඇඳ
සරල රේඛාවට තිබෙන දුර
එම ලම්බයේ ඇති ලක්ෂ්‍යට ⊥ දුර
ලක්ෂ්‍යයි

උදා ③ $|z| = 5$ හා
$Re(z) = 3$ වන z සොයන්න

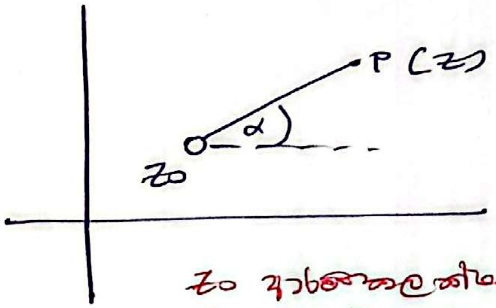


P(z) z = x+iy ගත්
x = 3

$z = 3+4i$
හෝ
$z = 3-4i$

$\boxed{04}$ පථයන් ආශ්‍රිත ගැටළු

(2) $arg(z-z_0) = \alpha$ වන විට z හි පථය

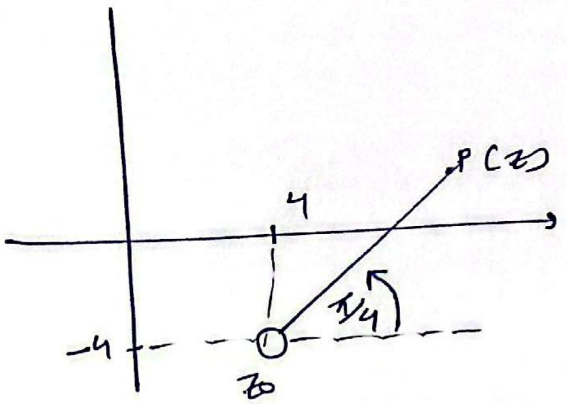


z_0 ආරම්භක ලක්ෂ්‍යය වේ.
z_0 වලින් ඇරඹෙන කිරණය.
[illegible]
z_0, z යා කරයි.
x අක්ෂයේ ධන දිශාව සමඟ
සාදන කෝණය α වේ.
නමුත් $z = z_0$ නොවිය යුතුය.

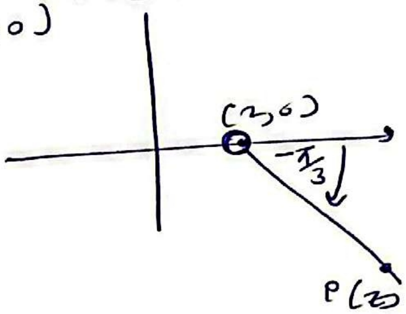
මෙහිදී පථයේ සමීකරණය
සොයාගැනීමට $z = x+iy$
ලෙස ගන්න

උදා ① $\mathrm{Arg}(z-4+4i)=\frac{\pi}{4}$
z විචලනය

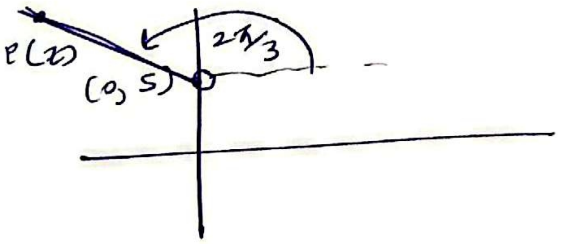
$\mathrm{Arg}(z-(-4i+4))=\frac{\pi}{4}$



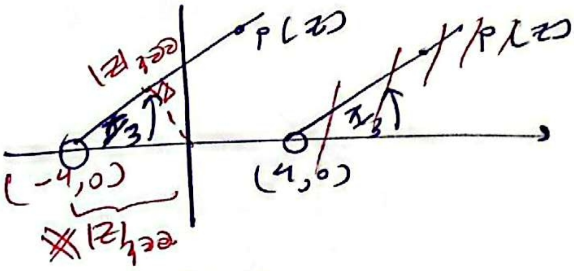
උදා ② $\mathrm{Arg}(z-2)=-\frac{\pi}{3}$
z විචලනය
$z_0=(2,0)$



උදා ③ $\mathrm{Arg}(z-5i)=\frac{2\pi}{3}$
z විචලනය
$z_0=(0,+5)$



උදා ④ $\mathrm{Arg}(z+4)=\frac{\pi}{3}$
z විචලනය අඳින්න.
$z_0=(-4,0)$

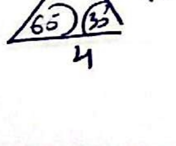


|z|අවම සොයන්න

$|z|_{අවම}$ = ලම්බ දුර

$|z|_{අවම}=4\frac{\sqrt{3}}{2}$

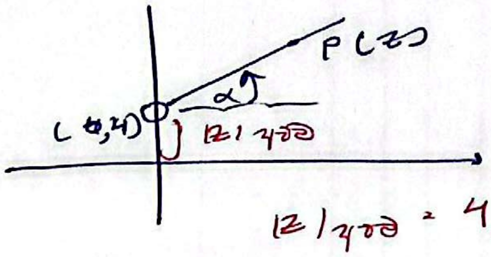
$=2\sqrt{3}$ //



උදා ⑤ $\mathrm{Arg}(z-4i)=\tan^{-1}2$

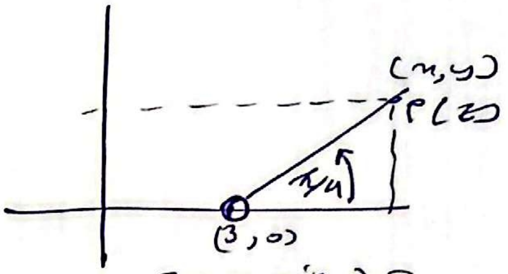
(i) z විචලනය (ii) $|z|_{අවම}$

$\tan^{-1}2=\alpha$
$\tan\alpha=$ ~~2~~
$z_0=0+4i$



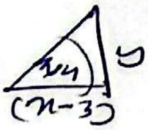
$|z|_{අවම}=4$ //

උදා $\arg(z-3)=\frac{\pi}{4}$
z විචලනය හා කාටීසීය සමීකරණය ද සොයන්න.
$z_0=(3+i0)$



$z=x+iy$ ලෙස

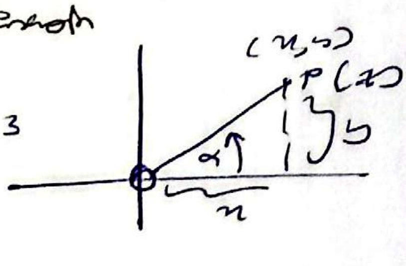
$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{y}{(x-3)}$



$x-3=y$ //

උදා $\mathrm{Arg}\,z=\tan^{-1}3$
එම z විචලනය හා කාටීසීය සමීකරණය සොයන්න

$\tan^{-1}3=\alpha$
$\tan\alpha=3$



$z_0=0+i0$

$z=x+iy$ ලෙස

$\tan\alpha=\frac{y}{x}$

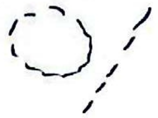
$3x=y$ //

05 අසමානතා තෘප්තකරන ප්‍රදේශ සෙවීම ආගන්ඩ් සටහනේ

සිහිපත් :- අසමානතාවය ලකුණ
= සහ හෝ රහිත වන
රේඛා ඇඳීම

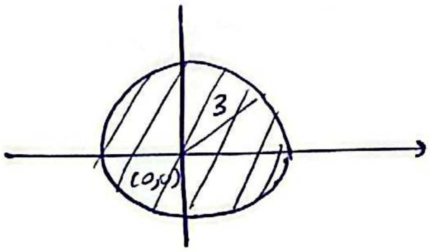
- අසමානතාවයේ = සහිතනම් }

අසමානතාවයේ = නොසහිතනම් }

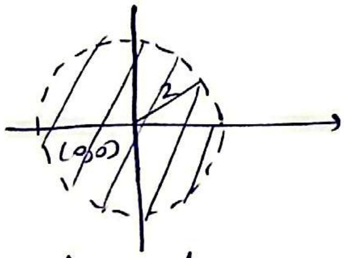


- අදාල කොටස අඳුරුකිරීම ඉරි ගැසීම

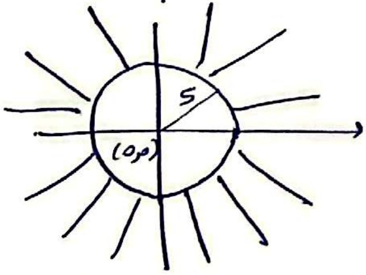
① $|z| \leq 3$



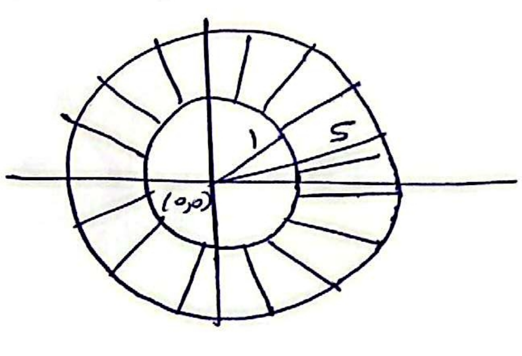
② $|z| < 2$



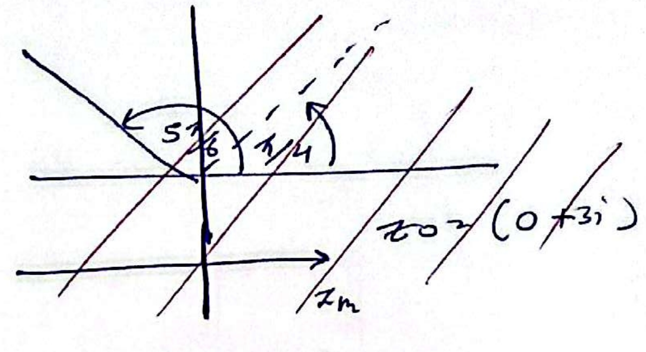
③ $|z| \geq 5$



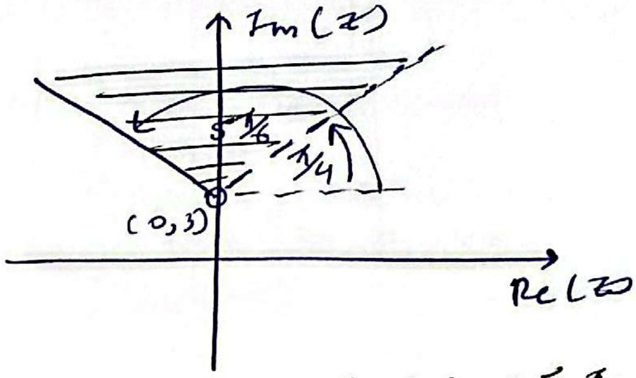
④ $1 \leq |z| \leq 5$



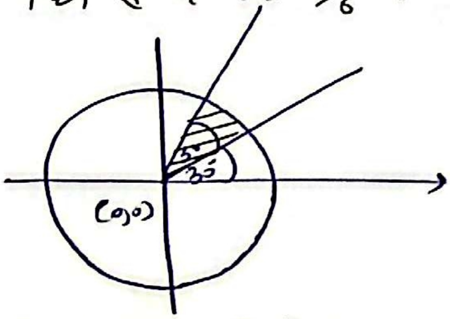
⑤ $\frac{\pi}{4} < Arg(z-3i) \leq \frac{5\pi}{6}$



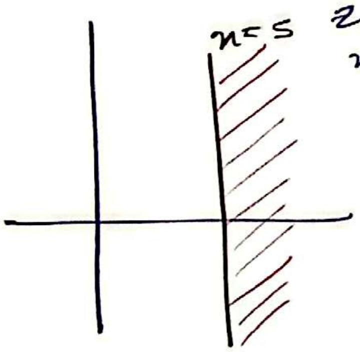
$z_0 = (0+3i)$



⑥ $|z| \leq 4$ හා $\frac{\pi}{6} \leq Arg\, z \leq \frac{\pi}{3}$

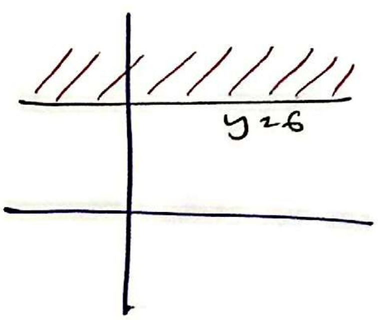


⑦ $Re(z-3) \geq 2$



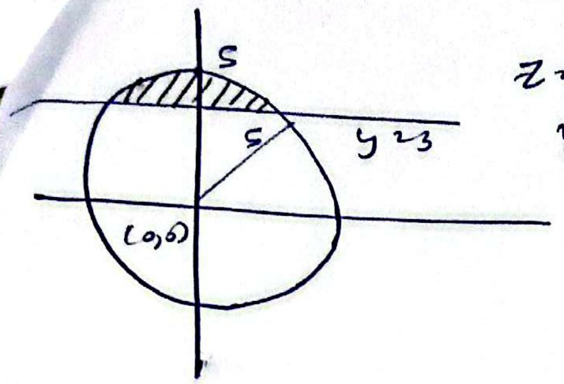
$z = x+iy$ නම්
$x-3 = 2$
$x = 5$

⑧ $Im(z-2i) \geq 4$



$z = x+iy$ නම්
$y-2 = 4$
$y = 6$

⑨ $|z| \leq 5$ හා $Im\, z \geq 3$



$z = x + iy$ නම්

$y = 3$

ගුණිතය හා බෙදීම නිර්මාණය

$\boxed{01}$ $z_1 . z_2$ නිර්මාණය

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

පියවර

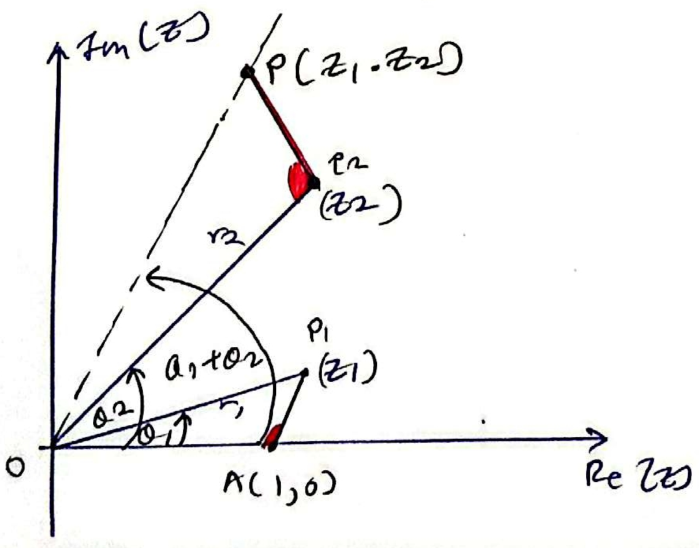
① z_1, z_2 ආගන්ඩ සටහනේ ලකුණු කරන්න

② $(\theta_1 + \theta_2)$ එකතු කෝණ දක්වන රේඛාව මත $z_1 . z_2$ ඇත.

③ ඕනෑම සමරූපී ත්‍රිකෝණයක් A(1,0) [illegible] යා කරන්න.

④ අනෙක් සමරූපී ත්‍රිකෝණයේ එම කෝණය සමාන වන ලෙස [illegible]

$\arg(\theta_1 + \theta_2)$ රේඛාව හා [illegible] ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය $z_1 . z_2$ වේ.



$\boxed{01}$ සාධනය

$OAP_1 \Delta$ හා $OP_2P \Delta$ සමරූපී බැවින්

$$\frac{r_2}{1} = \frac{OP}{r_1}$$

$$OP = r_1 . r_2 //$$

$$\arg(z_1 . z_2) = \theta_1 + \theta_2 //$$

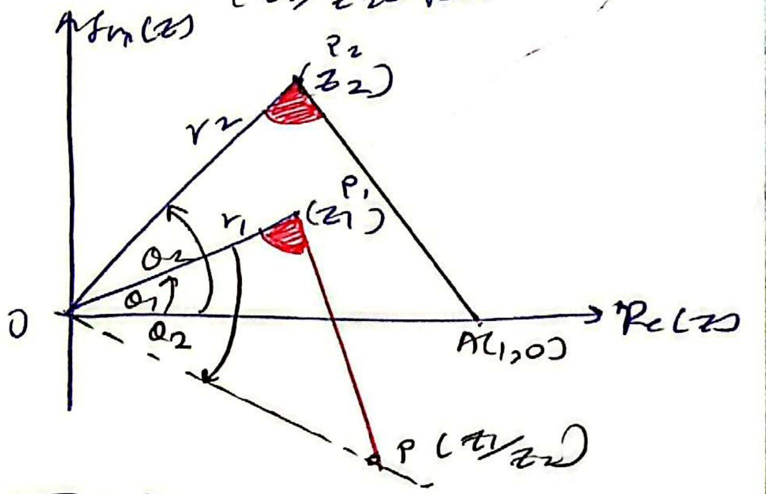
$\boxed{02}$ $\frac{z_1}{z_2}$ නිර්මාණය

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_1)]$$

පියවර ① z_1, z_2 ආගන්ඩ සටහනේ ලකුණු කරන්න

② $(\theta_1 - \theta_2)$ [illegible] කෝණය දක්වන රේඛාව මත z_1/z_2 ඇත.

③ ~~[illegible]~~ ඇති සමරූපී ත්‍රිකෝණයට A(1,0) [illegible] සමාන වන සේ [illegible] සමරූපී ත්‍රිකෝණය හා $\arg(\theta_1 - \theta_2)$ රේඛාව හමු වේ. [illegible] (z_1/z_2) ඇත.



$\boxed{02}$ සාධනය

$OP_1P \Delta$ හා $OP_2P \Delta$ සමරූපී බැවින්

$$\frac{OP}{1} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$OP = \frac{r_1}{r_2} //$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\theta_2 + \theta_1$$

$$= \theta_1 - \theta_2 //$$